

M6 Brüche erweitern, kürzen und vergleichen	1
Erweitern: Multiplizieren von Zähler und Nenner mit der gleichen natürlichen Zahl $\neq 0$ $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 125}{8 \cdot 125} = \frac{625}{1000}$	
Kürzen: Dividieren von Zähler und Nenner durch die gleiche natürliche Zahl $\neq 0$ $\frac{375}{600} = \frac{375 : 75}{600 : 75} = \frac{5}{8} \quad \text{bzw.} \quad \frac{375}{600} = \frac{5 \cdot 75}{8 \cdot 75} = \frac{5 \cdot 75 : 75}{8 \cdot 75 : 75} = \frac{5}{8}$	
Vergleichen: - auf den gleichen Nenner bringen: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 4} = \frac{8}{12} < \frac{9}{12} = \frac{3 \cdot 3}{4 \cdot 3} = \frac{3}{4}$ Der Bruch mit dem größeren Zähler ist der größere. - auf den gleichen Zähler bringen: $\frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9} < \frac{6}{8} = \frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{3}{4}$ Der Bruch mit dem größeren Nenner ist der kleinere. - mit einer dritten Zahl vergleichen $\frac{2}{5} < \frac{2}{4} < \frac{3}{4}$	

M6 Brüche erweitern, kürzen und vergleichen	1
Beispiele: - Erweitere $\frac{43}{52}$ auf den Nenner 468! $468 : 52 = 9$, man muss also mit 9 erweitern: $\frac{43}{52} = \frac{43 \cdot 9}{52 \cdot 9} = \frac{387}{468}$ - Kürze $\frac{68}{391}$ so weit wie möglich / vollständig! Primfaktorzerlegung: $68 = 2 \cdot 34 = 2 \cdot 2 \cdot 17$; $391 = 23 \cdot 17$; $\frac{68}{391} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 17}{23 \cdot 17} = \frac{4}{23}$ - Ordne der Größe nach und beginne mit dem kleinsten Bruch: $\frac{6}{17}$, $\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{5} = \frac{12}{60} < \frac{12}{34} = \frac{6}{17} \quad \frac{6}{17} = \frac{12}{34} < \frac{17}{34} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{5} < \frac{6}{17} < \frac{1}{2}$	

M6 Brüche addieren und subtrahieren	2
Nur gleichnamige Brüche (gleicher Nenner) können addiert / subtrahiert werden. gleichnamig machen: Der Hauptnenner ist das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) aller beteiligten Nenner.	
Beispiele: $\frac{5}{18} + \frac{5}{24} = ?$ Primfaktorzerlegung der Nenner: $18 = 2 \cdot 3 \cdot 3$ $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ $\left. \begin{array}{l} \text{die höchsten vorkom-} \\ \text{menden Potenzen der} \\ \text{beteiligten Primfakto-} \\ \text{ren bilden zusammen} \\ \text{den Hauptnenner:} \\ \text{HN} = 2^3 \cdot 3^2 = 72 \end{array} \right\}$ $\frac{5}{18} + \frac{5}{24} = \frac{5 \cdot 4}{18 \cdot 4} + \frac{5 \cdot 3}{24 \cdot 3} = \frac{20}{72} + \frac{15}{72} = \frac{20+15}{72} = \frac{35}{72}$	
$\frac{7}{8} - \frac{5}{12} = ?$ Primfaktorzerlegung der Nenner: $8 = 2 \cdot 2 \cdot 2$ $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ $\left. \begin{array}{l} \text{HN} = 2^3 \cdot 3 = 24 \end{array} \right\}$ $\frac{7}{8} - \frac{5}{12} = \frac{7 \cdot 3}{8 \cdot 3} - \frac{5 \cdot 2}{12 \cdot 2} = \frac{21}{24} - \frac{10}{24} = \frac{21-10}{24} = \frac{11}{24}$	
gemischte Zahlen: Man addiert / subtrahiert die Ganzen und die Brüche getrennt voneinander; wenn nötig, wandelt man vorher ein Ganzes des Minuenden in einen Bruch um.	

M6 Brüche addieren und subtrahieren	2
Beispiele: - Berechne: $\frac{5}{48} + \frac{7}{18} = \frac{5 \cdot 3}{48 \cdot 3} + \frac{7 \cdot 8}{18 \cdot 8} = \frac{15}{146} + \frac{56}{146} = \frac{15+56}{146} = \frac{71}{146}$ - Berechne: $\frac{9}{28} - \frac{11}{12} = \frac{9 \cdot 3}{28 \cdot 3} - \frac{11 \cdot 7}{12 \cdot 7} = \frac{27}{84} - \frac{77}{84} = \frac{27-77}{84} = -\frac{50}{84} = -\frac{25}{42}$ - Berechne: $3\frac{3}{8} + 8\frac{7}{18} = (3+8) + \left(\frac{3 \cdot 9}{8 \cdot 9} + \frac{7 \cdot 4}{18 \cdot 4}\right) = 11 + \frac{27+28}{72} = 11\frac{55}{72}$ - Berechne: $2\frac{7}{12} - 5\frac{3}{8} = (2-5) + \left(\frac{7 \cdot 2}{12 \cdot 2} - \frac{3 \cdot 3}{8 \cdot 3}\right) = -3 + \frac{14-9}{24} = -3 + \frac{5}{24} = -2\frac{19}{24}$ $\uparrow$ (ein Ganzes umwandeln)	

M6 Brüche multiplizieren und dividieren

3

Zum Multiplizieren / Dividieren muss man Brüche **nicht gleichnamig** machen!

Multiplizieren: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$

Dividieren: Multiplizieren mit dem Kehrbuch

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

(überall hier gilt
 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$;
 $b, c, d \neq 0$)

Bruch mal Zahl: $\frac{a}{b} \cdot c = \frac{a \cdot c}{b}$

Bruch geteilt durch Zahl: $\frac{a}{b} : c = \frac{a}{b \cdot c}$

Zahl mal Bruch: $a \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot b}{c}$

Zahl geteilt durch Bruch: $a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{a \cdot c}{b}$

Doppelbrüche: $\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{b} : c$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = a : \frac{b}{c}$$

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d}$$

M6 Brüche multiplizieren und dividieren

3

Beispiele:

• Berechne: $-\frac{8}{14} \cdot 1\frac{3}{4} = -\frac{8}{14} \cdot \frac{7}{4} = \frac{-8 \cdot 7}{14 \cdot 4} = \frac{-8}{2 \cdot 4} = -1$

• Berechne: $-1\frac{3}{4} : 2\frac{5}{8} = \frac{-7}{4} : \frac{21}{8} = \frac{-7}{4} \cdot \frac{8}{21} = \frac{-7 \cdot 8}{4 \cdot 21} = \frac{-2}{3} = -\frac{2}{3}$

• Berechne: $\frac{3}{8} \cdot 5 = \frac{3 \cdot 5}{8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$ $2 \cdot \frac{7}{12} = \frac{2 \cdot 7}{12} = \frac{7}{6} = 1\frac{1}{6}$

• Berechne: $\frac{42}{48} : 7 = \frac{42}{48 \cdot 7} = \frac{6}{48} = \frac{1}{8}$ $3 : \frac{9}{28} = 3 \cdot \frac{28}{9} = \frac{3 \cdot 28}{9} = \frac{28}{3} = 9\frac{1}{3}$

• Berechne: $\frac{\frac{27}{31}}{9} = \frac{27}{31} : 9 = \frac{27}{31 \cdot 9} = \frac{3}{31}$ $\frac{15}{\frac{5}{6}} = 15 : \frac{5}{6} = 15 \cdot \frac{6}{5} = \frac{15 \cdot 6}{5} = 18$

• Berechne: $\frac{\frac{17}{32}}{\frac{51}{64}} = \frac{17}{32} : \frac{51}{64} = \frac{17 \cdot 64}{32 \cdot 51} = \frac{2}{3}$

M6 Brüche ↔ Dezimalbrüche

4

Bruch in Dezimalbruch umwandeln:

Enthält der Nenner eines vollständig gekürzten Bruches nur die **Primfaktoren 2 und 5**, so lässt er sich durch Division in einen **endlichen Dezimalbruch** umwandeln:

$$\frac{15}{4} = 15 : 4 = 3,75$$

↑
Komma setzen, nachdem die
Einer heruntergeholt wurden

Dezimalbruch in Bruch umwandeln:

Stufenzahl als Nenner (Nullenzahl = Kommastellenzahl)

$$0,0235 = \frac{235}{10000} = \frac{47}{2000} \quad (\text{vollständig kürzen!}) \quad 0,025\overline{7} = \frac{257}{9999} \quad 0,0025\overline{7} = \frac{257}{99900}$$

Enthält der Nenner andere Primfaktoren, so erhält man durch Division einen **unendlichen (periodischen) Dezimalbruch**.

$$\frac{15}{22} = 15 : 22 = 0,6\overline{81}$$

← gleicher Rest ⇒
Periode 81

M6 Brüche ↔ Dezimalbrüche

4

Beispiele:

• Wandle in einen Dezimalbruch um: $-\frac{3}{5}$; $1\frac{3}{4}$; $-\frac{117}{50}$; $\frac{2}{9}$; $\frac{16}{23}$; $\frac{340}{33}$

$$-\frac{3}{5} = -\frac{60}{100} = -0,60 ; 1\frac{3}{4} = 1,75 ; -\frac{117}{50} = -\frac{234}{100} = -2,34 ; \frac{2}{9} = 0,2\overline{2} ; \frac{16}{23} = 16 : 23 = 0,6959521739130434782608 ; \frac{34}{330} = \frac{34 \cdot 3}{33 \cdot 3} : 10 = \frac{102}{99} : 10 = 1\frac{3}{99} : 10 = 1,03\overline{3} : 10 = 0,103\overline{3}$$

• Wandle in einen Bruch / eine gemischte Zahl um: 2,435 ; 0,08 ; $1,000\overline{37}$; 0,0802

$$2,435 = 2\frac{435}{1000} = 2\frac{87}{200} ; 0,08 = \frac{8}{100} = \frac{2}{25} ; 1,000\overline{37} = 1\frac{37}{99000} ; 0,0802 = \frac{802}{10000} = \frac{401}{5000}$$

• Wandle in einen Dezimalbruch um und runde auf drei Nachkommastellen: $-\frac{16}{23}$; $\frac{7}{16}$; $-\frac{261}{15}$; $\frac{35}{26}$

$$-\frac{16}{23} = -0,6959 \dots \approx -0,696 ; \frac{7}{16} = 0,4375 \approx 0,438 ; -\frac{261}{29} = -9,000 ; \frac{35}{26} = 1,3461 \dots \approx 1,346$$

M6 Dezimalbrüche – Grundrechenarten		5
Addieren / Subtrahieren:	Kommata untereinander schreiben: $\begin{array}{r} 1,063 \\ + 0,1497 \\ \hline 1,2127 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1',0'6'4'3 \\ - 0,1669 \\ \hline 0,8974 \end{array}$	
Multiplizieren:	Das Ergebnis besitzt so viele Kommastellen wie beide Faktoren zusammen: $\begin{array}{r} 157 \cdot 269 \\ \hline 31400 \\ 9420 \\ \hline 42233 \end{array}$ $1,57 \cdot 2,69 = 4,2233$ $0,5 \cdot 0,4 = 0,20 [= 0,2]$	
Dividieren:	Man verschiebt das Komma bei beiden Zahlen um gleich viele Stellen so weit nach rechts, bis der Divisor eine natürliche Zahl ist. $0,364 : 0,08 = 3,64 : 0,8 = 36,4 : 8 = 4,55$ $\begin{array}{r} 32 \\ 4 \overline{) 40} \\ \underline{40} \\ 0 \end{array}$ Beim Überschreiten des Kommas im Dividenden setzt man auch im Ergebnis ein Komma.	

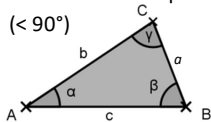
M6 Dezimalbrüche – Grundrechenarten		5
Beispiele:		
• Berechne:	$1,66 + 0,4$; $1,73 + 0,37$; $61,12 - 4,2$; $25 - 2,83$	
	$\begin{array}{r} 1,66 \\ + 0,40 \\ \hline 2,06 \end{array}$ $\begin{array}{r} 1,73 \\ + 0,37 \\ \hline 2,10 \end{array}$ $\begin{array}{r} 61,12 \\ - 4,20 \\ \hline 56,92 \end{array}$ $\begin{array}{r} 25,00 \\ - 2,83 \\ \hline 22,17 \end{array}$	
• Berechne:	$82,5 \cdot 0,29$; $0,0045 \cdot 8,8$; $3,004 \cdot 2,05$; $0,5 \cdot 2,83$	
	$\begin{array}{r} 82,5 \cdot 0,29 \\ \hline 16500 \\ 7425 \\ \hline 23925 \end{array}$ $\begin{array}{r} 0,0045 \cdot 8,8 \\ \hline 3600 \\ 360 \\ \hline 0,03960 \end{array}$ $\begin{array}{r} 3,004 \cdot 2,05 \\ \hline 600800 \\ 15020 \\ \hline 6,15820 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2,83 \cdot 0,5 \\ \hline 1,415 \end{array}$	
• Berechne:	$38,43 : 0,1$; $0,054 : 0,45$; $6,5104 : 2,6$	
	$38,43 : 0,1 = 384,3 : 1 = \underline{384,3}$ $38,43 : 0,1 = 3843 : 10 = \underline{384,3}$ $0,054 : 0,45 = 5,4 : 45 = \underline{0,12}$ $0,054 : 0,45 = 54 : 450 = \underline{0,12}$ $6,5104 : 2,6 = 65,104 : 26 = \underline{2,504}$ $6,5104 : 2,6 = 65104 : 26000 = \underline{2,504}$	

M6 Zehnerpotenzen		6
Stufenzahl $\vdots$ $10^3 = 1\,000$ eine Eins mit 3 Nullen $10^2 = 100$ eine Eins mit 2 Nullen $10^1 = 10$ eine Eins mit 1 Null $10^0 = 1$ $10^{-1} = 0,1$ eine Eins an der 1. Nachkommastelle $10^{-2} = 0,01$ eine Eins an der 2. Nachkommastelle $10^{-3} = 0,001$ eine Eins an der 3. Nachkommastelle $\vdots$		
Multipliziert man einen Dezimalbruch mit $10^1, 10^2, 10^3, \dots$ so rückt das Komma um 1; 2; 3; ... Stellen nach rechts		
Multipliziert man einen Dezimalbruch mit $10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \dots$ bzw. dividiert man einen Dezimalbruch durch $10^1, 10^2, 10^3, \dots$ so rückt das Komma um 1; 2; 3; ... Stellen nach links		

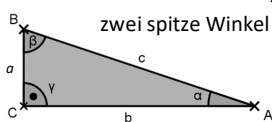
M6 Zehnerpotenzen		6
Beispiele:		
• Berechne (Kommaverschiebung):	$73,29 \cdot 10$; $0,362 \cdot 100$; $4,2 : 1000$; $0,0047 : 100$	
	$73,29 \cdot 10 = \underline{732,9}$; $0,362 \cdot 100 = \underline{36,2}$; $4,2 : 1000 = \underline{0,0042}$; $0,0047 : 100 = \underline{0,000047}$	
• Schreibe dezimal:	$5 \cdot 10^{-2}$; 5^{-2} ; 10^{-5} ; $5,2 \cdot 10^5$; $765 \cdot 10^{-7}$; $0,0004829 \cdot 10^5$	
	$5 \cdot 10^{-2} = \underline{0,05}$; $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} = \underline{0,04}$; $10^{-5} = \underline{0,00001}$; $5,2 \cdot 10^5 = \underline{520000}$; $765 \cdot 10^{-7} = \underline{0,0000765}$; $0,0004829 \cdot 10^5 = \underline{48,29}$	
• Schreibe mit Hilfe einer Zehnerpotenz so um, dass die Zahlen nur eine Vorkommastelle besitzen:	8000000 ; 5379000000 ; 75 ; $0,0000697$; $6,3$; $0,24$; 511000000 km^2	
	$8000000 = 8 \cdot 10^6$; $5379000000 = 5,379 \cdot 10^9$; $75 = 7,5 \cdot 10^1$; $0,0000697 = 6,97 \cdot 10^{-5}$; $6,3 = 6,3 \cdot 10^0$; $0,24 = 2,4 \cdot 10^{-1}$; $511000000 \text{ km}^2 = 5,11 \cdot 10^8 \text{ km}^2$	

spitzwinkliges Dreieck:

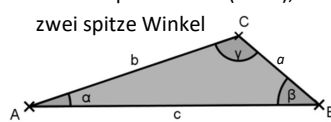
Jeder Winkel ist spitz
($< 90^\circ$)

**rechtwinkliges Dreieck:**

Ein rechter Winkel,
zwei spitze Winkel

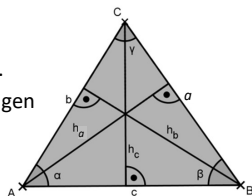
**stumpfwinkliges Dreieck**

Ein stumpfer Winkel ($> 90^\circ$),
zwei spitze Winkel

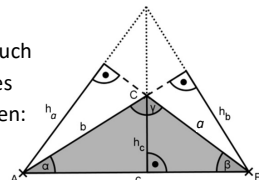
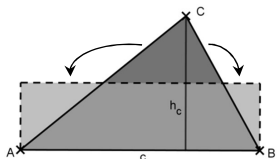
**Höhen im Dreieck:**

Jedes Dreieck besitzt **drei Höhen**.

Die Höhen bzw. ihre Verlängerungen
schneiden sich in einem Punkt.



Sie können auch
außerhalb des
Dreiecks liegen:

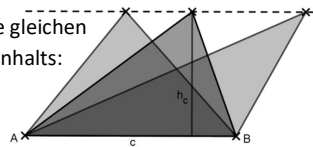
**Flächeninhalt eines Dreiecks:**

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

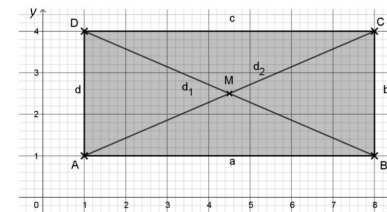
$$A = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

Dreiecke gleichen
Flächeninhalts:

**Beispiele:**

- Im Rechteck $ABCD$ halbiert M die beiden Diagonalen d_1 und d_2 . Begründe, dass die Dreiecke $\triangle BCM$ und $\triangle ABM$ den gleichen Flächeninhalt besitzen, ohne diesen jedoch auszurechnen. (nach einer Abituraufgabe von 2019)

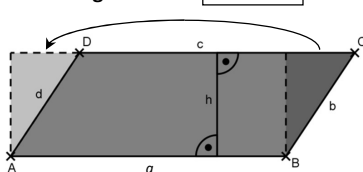
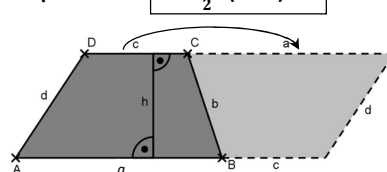
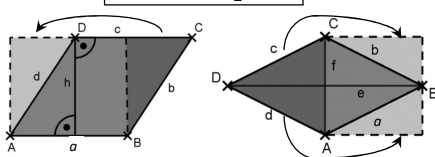
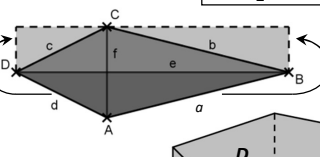


Lösung: Die Streckenlängen $|\overline{AM}|$ und $|\overline{MC}|$ sind gleich groß, da M die Diagonale d_2 halbiert. Wählt man diese beiden Strecken als Grundlinie der Dreiecke $\triangle BCM$ und $\triangle ABM$, so haben die Dreiecke außerdem die gleiche Höhe, nämlich $d(B; AC)$, den Abstand des Punktes B von AC , da der Punkt B die Spitze beider Dreiecke bildet. Zwei Dreiecke mit gleicher Grundlinie und gleicher Höhe sind flächengleich.

- Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks $\triangle AMD$ aus der Aufgabe oben. (Entnimm fehlende Angaben der obigen Zeichnung.)

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AD}| \cdot h_a \quad \text{mit} \quad h_a = \frac{1}{2} \cdot |\overline{AB}| = \frac{1}{2} \cdot 7 = 3,5 \text{ [LE]}$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3,5 = 1,5 \cdot 3,5 = \underline{5,25 \text{ [FE]}}$$

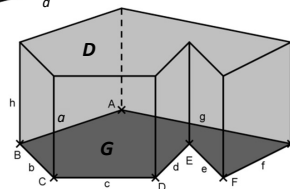
Parallelogramm: $A = a \cdot h$ **Trapez:** $A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$ **Raute:** $A = a \cdot h = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ **Drachenviereck:** $A = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f$ **Oberfläche gerader Prismen:**

$$A = 2 \cdot G + M = 2 \cdot G + U \cdot h$$

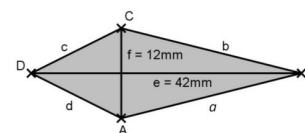
G : Grundfläche = Deckfläche D

M : Mantelfläche

U : Umfang von G

**Beispiele:**

- Berechne jeweils den Flächeninhalt in cm^2 :



$$\text{Drache: } A_D = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 12\text{mm} \cdot 42\text{mm} = 6\text{mm} \cdot 42\text{mm} = 252\text{mm}^2 = \underline{2,52\text{cm}^2}$$

$$\text{Raute: } A_R = \frac{1}{2} \cdot e \cdot f = \frac{1}{2} \cdot 2,3\text{cm} \cdot 1,7\text{cm} = 1,15\text{cm} \cdot 1,7\text{cm} = \underline{1,955\text{cm}^2}$$

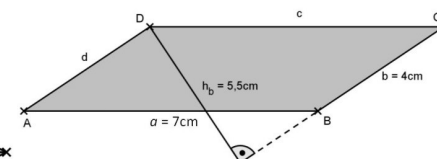
$$\text{Parallelogramm: } A_P = b \cdot h_b = 4\text{cm} \cdot 5,5\text{cm} = \underline{22\text{cm}^2}$$

- Bestimme für ein Trapez $ABCD$ mit $a \parallel c$ die fehlenden Größen: Gegeben sind

$$b = 10,6\text{cm} ; c = 14\text{cm} ; d = 65\text{mm} ; A = 43,96\text{cm}^2 ; U = 32,8\text{cm}$$

$$a = U - (b + c + d) = 32,8\text{cm} - (10,6 + 14 + 6,5)\text{cm} = \underline{1,7\text{cm}}$$

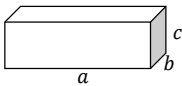
$$h = A : [(a + c) : 2] = \frac{2 \cdot A}{a + c} = \frac{2 \cdot 43,96\text{cm}^2}{1,7\text{cm} + 14\text{cm}} = \frac{87,92\text{cm}}{15,7} = \underline{5,6\text{cm}}$$



Das **Volumen eines Körpers** gibt an, welchen **Rauminhalt** er besitzt.

Einheiten: $1 \text{ cm}^3 = 1\,000 \text{ mm}^3$ $1 \text{ dm}^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$ $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ dm}^3$
 $1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ ml}$ $1 \text{ dm}^3 = 1 \ell$ $1 \text{ hl} = 100 \ell$
 $1 \text{ km}^3 = 1 \text{ km} \cdot 1 \text{ km} \cdot 1 \text{ km} = 1\,000 \text{ m} \cdot 1\,000 \text{ m} \cdot 1\,000 \text{ m} = 1\,000\,000\,000 \text{ m}^3$

Volumen eines Quaders:



$$V_{\text{Quader}} = a \cdot b \cdot c$$

Spezialfall: Würfel

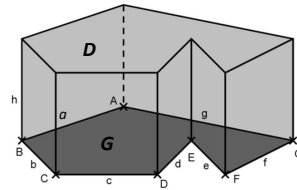


$$V_{\text{Würfel}} = a \cdot a \cdot a = a^3$$

Volumen anderer Körper: **Zerlegen** in Quader / Würfel oder **Ergänzen** zu Quadern / Würfeln

Volumen eines geraden Prismas: Grundfläche **G** mal Höhe **h**

$$V_{\text{gerades Prisma}} = G \cdot h$$



Beispiele:

- Eine quaderförmige Waschmittelpackung ist 25cm lang, 12cm breit und 16cm hoch. Sie wird bis zur Höhe von 14cm mit Waschpulver befüllt. Berechne das Volumen V_P des Pulverinhalts und das nicht befüllte Restvolumen V_R der Packung jeweils in ℓ .

$$V_P = (25 \cdot 12 \cdot 14) \text{ cm}^3 = 4200 \text{ cm}^3 = \underline{4,2 \ell} ; V_R = (25 \cdot 12 \cdot 2) \text{ cm}^3 = 600 \text{ cm}^3 = \underline{0,6 \ell}$$

- In eine leere Baugrube mit 80 m^2 Grundfläche sind 16 hl Wasser gelaufen. Berechne, wie hoch das Wasser in der Baugrube steht, wenn nichts versickert.

$$16 \text{ hl} = 1600 \ell = 1600 \text{ dm}^3 ; h = V : A = 1600 \text{ dm}^3 : 80 \text{ m}^2 = 1600 \text{ dm}^3 : 8000 \text{ dm}^2 = 0,5 \text{ dm} = \underline{5 \text{ cm}}$$

Man schreibt den Quotienten **Z : N** oft als **Bruch** $\frac{Z}{N}$. Ein Bruch besteht immer aus **Zähler Z** und **Nenner N**.

Der **Anteil** $\frac{Z}{N}$ eines Ganzen bedeutet:

Man teilt das Ganze in **N gleich große Teile** und **nimmt Z solcher Teile**.

$$\underbrace{\frac{3}{4}}_{\text{Anteil}} \text{ von } \underbrace{100 \text{ kg}}_{\text{Ganzes}} = \left(\frac{1}{4} \text{ von } 100 \text{ kg} \right) \cdot 3 = \frac{3}{4} \cdot 100 \text{ kg} = \frac{3 \cdot 100 \text{ kg}}{4} = \frac{3 \cdot 25 \text{ kg}}{1} = \underbrace{75 \text{ kg}}_{\text{Bruchteil}}$$

Prozentangaben:

Auf den **Nenner 100** erweiterte oder gekürzte Anteile gibt man häufig in **Prozent** an:

$$\text{z.B. } \frac{3}{4} = \frac{75}{100} = 75\%$$

Auf den **Nenner 1000** erweiterte oder gekürzte Anteile gibt man häufig in **Promille** an:

$$\text{z.B. } 0,25\% = \frac{0,25}{100} = \frac{2,5}{1000} = 2,5\text{‰}$$

Beispiele:

- Berechne den Bruchteil: $\frac{7}{12}$ von 60h ; $\frac{7}{12}$ von 60h = $\frac{7}{12} \cdot 60 \text{ h} = \frac{7 \cdot 60 \text{ h}}{12} = 35 \text{ h}$

- Berechne den Anteil, den 6cm von 8cm bilden. $\frac{6 \text{ cm}}{8 \text{ cm}} = \frac{3}{4}$

- Gib den Anteil in der in Klammern angegeben Einheit an: 5min (1h) 12cm (1m)

$$\frac{5 \text{ min}}{1 \text{ h}} = \frac{5 \text{ min}}{60 \text{ min}} = \frac{1}{12}$$

$$\frac{12 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = \frac{12 \text{ cm}}{100 \text{ cm}} = \frac{3}{25}$$

- Gib die Anteile jeweils in Prozent an: $\frac{3}{25} ; \frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 4}{25 \cdot 4} = \frac{12}{100} = 12\%$
 $\frac{11}{20} ; \frac{11}{20} = \frac{11 \cdot 5}{20 \cdot 5} = \frac{55}{100} = 55\%$

- Gib die Anteile jeweils in Promille an: $\frac{3}{25} ; \frac{3}{25} = \frac{3 \cdot 40}{25 \cdot 40} = \frac{120}{1000} = 120\text{‰}$
 $\frac{1}{200} ; \frac{1}{200} = \frac{1 \cdot 5}{200 \cdot 5} = \frac{5}{1000} = 5\text{‰}$

Prozentsatz von dem Grundwert = Prozentwert

Prozentsatz · Grundwert = Prozentwert

Abkürzung:

PS · GW = PW

$$30\% \text{ von } 7000\text{€} = 2100\text{€}$$

(Prozentwert gesucht)

$$30\% \cdot 7000\text{€} = 2100\text{€}$$

Auflösen durch vergleichen:

$$15\% \cdot x = 2100\text{€} \quad (\text{Grundwert gesucht})$$

$$x \cdot 2500\text{€} = 3000\text{€} \quad (\text{Prozentsatz gesucht})$$

$$\begin{array}{l} 2 \cdot x = 6 \\ x = 6 : 2 \end{array} \quad \text{Vergleichsgleichung} \quad \begin{array}{l} x \cdot 3 = 6 \\ x = 6 : 3 \end{array}$$

$$x = 2100\text{€} : 15\% =$$

$$x = 3000\text{€} : 2500\text{€} =$$

$$= 2100\text{€} : 0,15 =$$

$$= \frac{3000\text{€}}{2500\text{€}} = \frac{30}{25} = \frac{120}{100} = 120\%$$

$$= 2100\text{€} : \frac{15}{100} =$$

$$= 2100\text{€} \cdot \frac{100}{15} = \frac{2100\text{€} \cdot 20}{3} = 700\text{€} \cdot 20 = 14000\text{€}$$

Beispiele:

- Berechne den Prozentwert: 58% von 1h ;

$$\text{PW} = 58\% \text{ von } 60\text{min} = 58\% \cdot 60\text{min} = \frac{58 \cdot 60\text{min}}{100} = \frac{58 \cdot 3\text{min}}{5} = \frac{174\text{min}}{5} = 34,8\text{min}$$

- Berechne den Prozentsatz: 54min von 1h ; PS = PW : GW

$$\text{PS} = \frac{54\text{min}}{1\text{h}} = \frac{54\text{min}}{60\text{min}} = \frac{9}{10} = 0,9 = 90\%$$

- Berechne den Grundwert: 60% sind 12min ; GW = PW : PS

$$\text{GW} = \frac{12\text{min}}{60\%} = \frac{12\text{min}}{\frac{60}{100}} = \frac{12\text{min} \cdot 100}{60} = \frac{100\text{min}}{5} = 20\text{min}$$

Dieser Lösungsweg ist unabhängig davon, welche der drei Größen (Prozentsatz, Grundwert oder Prozentwert) aus der „Grundgleichung der Prozentrechnung“ gesucht ist!

Wie viel sind
15% von 3500€ ?
(Prozentwert gesucht)

$$\begin{array}{l} 100\% \triangleq 3500\text{€} \\ 15\% \triangleq x \text{ [€]} \end{array}$$

Wie viel Prozent entsprechen
1050€ von 3500€ ?
(Prozentsatz gesucht)

$$\begin{array}{l} 100\% \triangleq 3500\text{€} \\ x [\%] \triangleq 1050\text{€} \end{array}$$

5% Zins sind 175€. Wie
groß ist das Vermögen ?
(Grundwert gesucht)

$$\begin{array}{l} 5\% \triangleq 175\text{€} \\ 100\% \triangleq x \text{ [€]} \end{array}$$

Diagonal multiplizieren und durch die übriggebliebene Angabe teilen (verkürzter Dreisatz):

$$x \text{ [€]} = \frac{15\% \cdot 3500\text{€}}{100\%} =$$

$$= 15 \cdot 35\text{€} =$$

$$= \underline{525\text{€}}$$

$$x [\%] = \frac{100\% \cdot 1050\text{€}}{3500\text{€}} =$$

$$= \frac{1050\%}{35} =$$

$$= \underline{30\%}$$

$$x \text{ [€]} = \frac{100\% \cdot 175\text{€}}{5\%} =$$

$$= 100 \cdot 35\text{€} =$$

$$= \underline{3500\text{€}}$$

Beispiele:

- Berechne den Prozentwert: 58% von 1h ;

$$100\% \triangleq 1\text{h} = 60\text{min}$$

$$58\% \triangleq x \text{ [min]}$$

$$x = \frac{58 \cdot 60\text{min}}{100} = \frac{58 \cdot 3\text{min}}{5} = \frac{174\text{min}}{5} = 34,8\text{min}$$

- Berechne den Prozentsatz: 54min von 1h ;

$$100\% \triangleq 1\text{h} = 60\text{min}$$

$$x [\%] \triangleq 54\text{min}$$

$$x = \frac{100\% \cdot 54\text{min}}{60\text{min}} = \frac{100\% \cdot 9}{10} = 90\%$$

- Berechne den Grundwert: 60% sind 12min ;

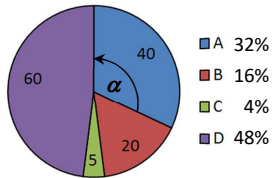
$$100\% \triangleq x \text{ [min]}$$

$$60\% \triangleq 12\text{min}$$

$$x = \frac{100\% \cdot 12\text{min}}{60\%} = \frac{100\text{min}}{5} = 20\text{min}$$

Anteile lassen sich gut durch **Diagramme** veranschaulichen:

Kreisdiagramm

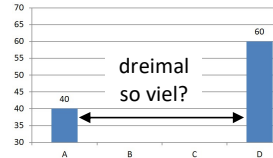


Beim Kreisdiagramm entspricht die Größe des **Mittelpunktswinkels α** dem jeweiligen Anteil:

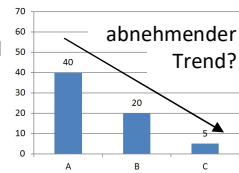
$$\alpha = \frac{40}{125} \cdot 360^\circ = \frac{32}{100} \cdot 360^\circ = 32\% \cdot 360^\circ = 0,32 \cdot 360^\circ = \underline{115,2^\circ}$$

Verfälschung von Diagrammen:

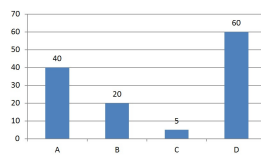
Die Hochwertachse
beginnt nicht bei Null:



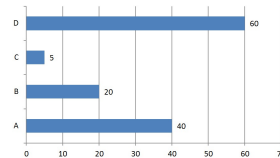
Nur eine **Auswahl**
der Daten
wird
dargestellt
(D = 60 fehlt):



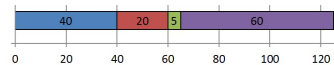
Säulendiagramm



Balkendiagramm



Streifendiagramm



Beispiele:

Bei der Schülersprecherwahl haben die Kandidaten folgende Stimmenzahl erhalten:

Adam: 108; Benita: 120; Christina: 150; David: 222.

Erstelle ein Kreis-, Säulen-, Balken- und Streifendiagramm.

Berechnung der Anteile: $108 + 120 + 150 + 222 = 600$ (Gesamtstimmenzahl)

$$A: \frac{108}{600} = \frac{18}{100} = 18\%$$

$$B: \frac{120}{600} = \frac{20}{100} = 20\%$$

$$C: \frac{150}{600} = \frac{25}{100} = 25\%$$

$$D: \frac{222}{600} = \frac{37}{100} = 37\%$$

Berechnung der Mittelpunktswinkel:

$$A: \frac{18}{100} \cdot 360^\circ = 64,8^\circ$$

$$B: \frac{20}{100} \cdot 360^\circ = 72^\circ$$

$$C: \frac{25}{100} \cdot 360^\circ = 90^\circ$$

$$D: \frac{37}{100} \cdot 360^\circ = 133^\circ$$

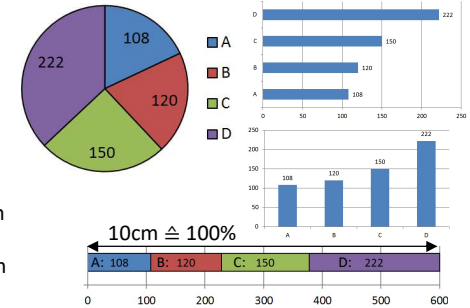
Berechnung der Säulen- / Balken- / Streifenlängen:

$$A: \frac{18}{100} \cdot 10\text{cm} = 1,8\text{cm}$$

$$B: \frac{20}{100} \cdot 10\text{cm} = 2,5\text{cm}$$

$$C: \frac{25}{100} \cdot 10\text{cm} = 2,0\text{cm}$$

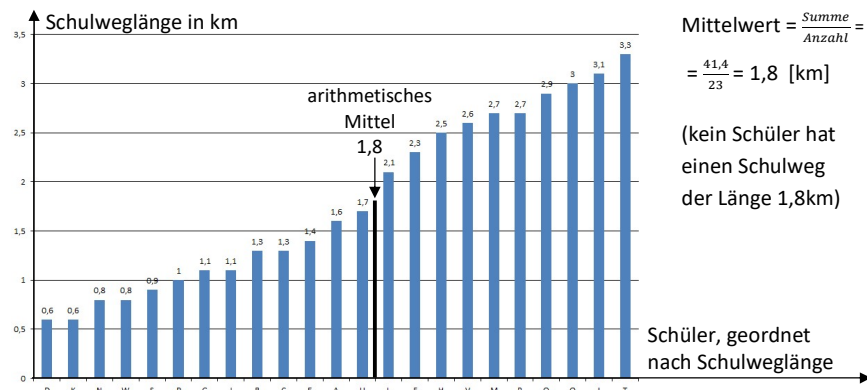
$$D: \frac{37}{100} \cdot 10\text{cm} = 3,7\text{cm}$$



Das **arithmetische Mittel** wird berechnet als $\frac{\text{Summe der einzelnen Werte}}{\text{Gesamtanzahl an Werten}}$.

Andere Namen für das arithmetische Mittel sind **Durchschnitt**, **Mittelwert** oder nur **Mittel**.

Häufig stimmt das arithmetische Mittel **mit keinem der Werte des Datensatzes überein**:



Beispiele:

Bestimme von jedem Datensatz das arithmetische Mittel und gib den Wert / die Werte des Datensatzes an, der / die dem arithmetischen Mittel am nächsten kommt / kommen:

3cm; 2cm; 5cm; 3cm; 3cm; 4cm; 2cm; 4cm

12,4kg; 14,2kg; 14,4kg; 11,6kg; 12,4kg

2,50m; 2,10m; 1,80m; 1,90m; 1,75m; 2,10m; 2,55m

Mittelwerte:

$(3\text{cm} + 2\text{cm} + 5\text{cm} + 3\text{cm} + 3\text{cm} + 4\text{cm} + 2\text{cm} + 4\text{cm}) : 8 = \underline{4,5\text{cm}}$; am nächsten: 5cm; 4cm; 4cm

$(12,4\text{kg} + 14,2\text{kg} + 14,4\text{kg} + 11,6\text{kg} + 12,4\text{kg}) : 5 = \underline{13,0\text{kg}}$; am nächsten: 12,4kg; 12,4kg

$(2,50\text{m} + 2,10\text{m} + 1,80\text{m} + 1,90\text{m} + 1,75\text{m} + 2,10\text{m} + 2,55\text{m}) : 7 = \underline{2,10\text{m}}$;

am nächsten: 2,10m; 2,10m

(mehrere Daten können gleich weit vom Mittelwert entfernt sein oder diesen sogar erreichen)

M6 Absolute und relative Häufigkeit

15

Die **absolute Häufigkeit** ist eine Anzahl (z.B. 6 Schüler, die ein Haustier besitzen).

Die zugehörige **relative Häufigkeit** ist der Anteil der absoluten Häufigkeit an der Gesamtzahl:

$$\text{relative Häufigkeit} = \frac{\text{absolute Häufigkeit}}{\text{Gesamtzahl}}$$

Beispiel:

6 von 30 Schülern besitzen ein Haustier

$$\text{relative Häufigkeit der Haustierbesitzer} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} = 0,2 = 20\% \quad [\text{jeder fünfte Schüler}]$$

Relative Häufigkeiten werden oft in Prozentschreibweise angegeben.

M6 Relative Häufigkeit

15

Beispiele:

- Bei der Schülersprecherwahl haben die Kandidaten folgende Stimmenzahl erhalten:
Adam: 108; Benita: 120; Christina: 150; David: 222.
Berechne die relativen Häufigkeiten jeweils als Anteile und in Prozent.

Berechnung der Anteile: $108 + 120 + 150 + 222 = 600$ (Gesamtstimmenzahl)

$$\text{A: } \frac{108}{600} = \frac{18}{100} = 18\% \quad \text{B: } \frac{120}{600} = \frac{20}{100} = 20\% \quad \text{C: } \frac{150}{600} = \frac{25}{100} = 25\% \quad \text{D: } \frac{222}{600} = \frac{37}{100} = 37\%$$

- Von den 800 Schülern einer Schule haben 7% blonde, 32% hellbraune, 43% dunkelbraune, 3% rötliche und 14% schwarze Haare. Berechne die absoluten Häufigkeiten der einzelnen Haarfarben.

$$100\% \triangleq 800 \text{ Schüler;}$$

$$\text{blond: } \frac{7}{100} \cdot 800 = 56$$

$$\text{hellbraun: } \frac{32}{100} \cdot 800 = 256$$

$$\text{dunkelbraun: } \frac{43}{100} \cdot 800 = 344$$

$$\text{rötlich: } \frac{3}{100} \cdot 800 = 24$$

$$\text{schwarz: } \frac{14}{100} \cdot 800 = 112$$