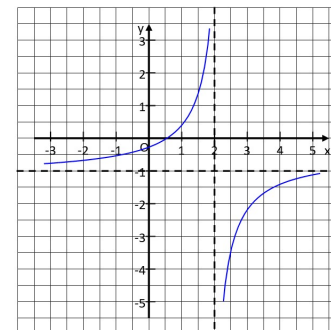


M11 Grenzwerte von Funktionen	1
Gegeben sei eine beliebige Funktion $f: x \mapsto f(x)$	
Grenzwerte gegen $\pm\infty$:	
Kommen die Funktionswerte $f(x)$ für beliebig groß (oder beliebig klein) werdende x –Werte einer reellen Zahl a beliebig nahe, so nennt man a den Grenzwert von f für $x \rightarrow \infty$ (oder $x \rightarrow -\infty$).	
Man schreibt: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ beziehungsweise $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$	
Die Funktion f bezeichnet man dann als konvergent für $x \rightarrow \infty$ (oder $x \rightarrow -\infty$).	
Funktionen, die für $x \rightarrow \infty$ oder $x \rightarrow -\infty$ keinen Grenzwert besitzen, nennt man dort divergent und schreibt $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ beziehungsweise $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$	
Grenzwerte gegen eine Zahl x_0:	
Einer Stelle x_0 kann man sich von links (d.h. $x \rightarrow x_0^-$) oder von rechts (d.h. $x \rightarrow x_0^+$) nähern.	
Man verwendet demnach die folgenden Schreibweisen: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$	

M11 Grenzwerte von Funktionen	1
Beispiele:	
1) Am nebenstehend dargestellten Graphen G_f der Funktion f kann man die folgenden Grenzwerte ablesen: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -1^-$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1^+$ $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ und $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$	
2) Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $g(x) = \frac{5}{x+1}$ an den Grenzen ihres Definitionsbereichs!	
- Für die Definitionsmenge gilt: $D_g = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ - Verhalten im Unendlichen: $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x+1} = 0^+$ (da: «$\frac{5}{+\infty}$») $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x+1} = 0^-$ (da: «$\frac{5}{-\infty}$») - Verhalten an der Definitionslücke: $\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{5}{x+1} = -\infty$ (da: «$\frac{5}{0^-}$») $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5}{x+1} = +\infty$ (da: «$\frac{5}{0^+}$»)	



M11 Transformationen von Funktionsgraphen	2
Betrachtet wird eine beliebige Funktion f .	
Der Graph der Funktion g entsteht aus G_f durch	
1) Strecken von G_f in y – Richtung mit dem Faktor $ a $, wenn $g(x) = a \cdot f(x)$ Falls $a < 0$, wird G_f zudem an der x –Achse gespiegelt.	
2) Verschieben von G_f um d in y – Richtung , wenn $g(x) = f(x) + d$	
3) Strecken von G_f in x – Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{ b }$, wenn $g(x) = f(b \cdot x)$ Falls $b < 0$, wird G_f zudem an der y –Achse gespiegelt.	
4) Verschieben von G_f um $-c$ in x – Richtung , wenn $g(x) = f(x + c)$	
Dabei gilt: $a, b, c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	

M11 Transformationen von Funktionsgraphen	2
Beispiele:	
1) Beschreiben Sie schrittweise, wie der Graph der Funktion $g(x) = -2 \cdot f\left(\frac{1}{3}(x - 0,4)\right) - 2$ aus dem Graphen der Funktion f hervorgeht!	
- Streckung von G_f in x-Richtung mit dem Faktor 3 - Verschiebung um 0,4 nach rechts - Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 2 - Spiegelung an der y-Achse - Verschiebung um 2 nach unten	
Bemerkung: Die Spiegelung an der y -Achse und die Verschiebung nach unten dürfen nicht vertauscht werden!	
2) Beschreiben Sie schrittweise, wie der Graph der Funktion $h(x) = 0,5 \cdot 2^{-2x-2} + 3$ aus dem Graphen der Funktion $f(x) = 2^x$ hervorgeht!	
- Streckung von G_f in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$ - Spiegelung an der x-Achse - Verschiebung um 1 nach links (da $h(x) = 0,5 \cdot 2^{-2x-2} = 0,5 \cdot 2^{-2(x+1)}$) - Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 0,5 - Verschiebung um 3 nach oben	
Bemerkung: Die Spiegelung an der x -Achse und die Verschiebung nach links dürfen nicht vertauscht werden!	

M11 Einfache gebrochen-rationale Funktionen Teil 1	3
Eine Funktion heißt gebrochen-rational, wenn man sie in der Form $x \mapsto \frac{p(x)}{q(x)}$ darstellen kann, wobei $p(x) = a_z x^z + a_{z-1} x^{z-1} + \dots + a_1 x + a_0$ und $q(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0$ Polynome sind und $q(x)$ mindestens Grad 1 besitzt. Bei einfach gebrochen-rationalen Funktionen haben Zähler- und Nennerpolynom höchstens Grad 2 und liegen vollständig gekürzt vor. Das Verhalten einer gebrochen-rationalen Funktion für $x \rightarrow \infty$ oder $x \rightarrow -\infty$ hängt vom Grad des Zähler- und Nennerpolynoms ab: 1) Zählergrad $z <$ Nennergrad $n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $y = 0$ ist waagrechte Asymptote 2) Zählergrad $z =$ Nennergrad $n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{a_n}{b_n}$, $y = \frac{a_n}{b_n}$ ist waagrechte Asymptote 3) Zählergrad $z >$ Nennergrad $n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ oder $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ und $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ oder $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ Sonderfall: Zählergrad $z =$ Nennergrad $n + 1 \Rightarrow G_f$ besitzt eine schräge Asymptote.	

M11 Einfache gebrochen-rationale Funktionen Teil 1	3
Beispiele: 1) Untersuchen Sie jeweils das Verhalten der gegebenen Funktionen für $x \rightarrow \pm\infty$ und geben Sie die Gleichungen der waagrecchten bzw. schrägen Asymptoten an! • $f(x) = \frac{0,5x}{2x-2}$ $z = n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{0,5}{2} = 0,25 \Rightarrow y = 0,25$ waagrechte Asymptote • $g(x) = \frac{3x-2}{4x^2-1}$ $z < n \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0$ waagrechte Asymptote • $h(x) = 2x - 3 + \frac{5x-1}{3x^2}$ Umformen liefert: $h(x) = \frac{6x^3 - 9x^2 + 5x - 1}{3x^2}$ $z = n + 1 \Rightarrow$ Es gibt eine schräge Asymptote $y = 2x - 3$ • $k(x) = \frac{3x^2 - 4x + 2}{2x}$ $z = n + 1 \Rightarrow$ Es gibt eine schräge Asymptote Umformen liefert: $k(x) = 1,5x - 2 + \frac{2}{2x} \Rightarrow y = 1,5x - 2$ schräge Asymptote 2) Betrachtet wird die gebrochen-rationale Funktion $f(x) = \frac{-x^2 + 6x + 7}{4 + 2x^2}$, ihr Graph wird mit G_f bezeichnet. Ein Streifen der Breite 0,04 hat die waagrechte Asymptote als Symmetrieachse. Untersuchen Sie, ob der Graph von f für $x = -80$ innerhalb oder außerhalb des Streifens liegt! $z = n \Rightarrow y = -0,5$ waagrechte Asymptote, der Graph liegt also innerhalb des Streifens, wenn gilt: $f(x) \in] -0,52; -0,48[$ $f(80) = -0,536785379 \dots < -0,52 \Rightarrow$ Der Graph liegt für $x = -80$ außerhalb des Streifens.	

M11 Einfache gebrochen-rationale Funktion Teil 2	4
Werte, für die das Nennerpolynom Null wird, gehören nicht zur Definitionsmenge, man nennt sie Definitionslücken. Wenn für eine Definitionslücke x_0 gilt: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = -\infty \text{ oder } \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = -\infty \text{ oder } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \infty$ so nennt man x_0 Polstelle von f und die Gerade mit der Gleichung $x = x_0$ senkrechte Asymptote von G_f. Bemerkungen: 1) Der Graph G_f einer gebrochen-rationalen Funktion schneidet seine senkrechte Asymptote niemals, es kann jedoch Schnittpunkte mit der waagrecchten und der senkrechten Asymptote geben. 2) Eine gebrochen-rationale Funktion kann niemals zugleich eine waagrechte und eine schräge Asymptote besitzen, waagrecht und senkrecht bzw. schräg und senkrecht ist jedoch möglich.	

M11 Einfache gebrochen-rationale Funktion Teil 2	4
Beispiele: 1) Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2-9}{x-1}$. a) Geben Sie die Definitionsmenge von f an und berechnen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte von G_f mit den Koordinatenachsen! $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$, NST: $x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \pm 3 \Rightarrow N_1(3/0)$ und $N_2(-3/0)$ $f(0) = 9 \Rightarrow S(0/9)$ b) Zeigen Sie, dass der Term $x + 1 - \frac{8}{x-1}$ eine andere Darstellung von $f(x)$ ist! $x + 1 - \frac{8}{x-1} = \frac{(x+1)(x-1)-8}{x-1} = \frac{x^2-1-8}{x-1} = \frac{x^2-9}{x-1}$ c) Geben Sie die Gleichungen aller Asymptoten von G_f an! Schräge Asymptote: $y = x + 1$ Senkrechte Asymptote: $x = 1$ 2) Die einfache gebrochen-rationale Funktion f hat an der Stelle $x = 1$ eine Nullstelle und an der Stelle $x = -3$ eine Polstelle ohne Vorzeichenwechsel. Außerdem hat ihr Funktionsgraph die Gerade mit der Gleichung $y = 2$ als Asymptote. Geben Sie einen möglichen Funktionsterm an! $f(x) = \frac{2 \cdot (x-1) \cdot x}{(x+3)^2}$	

M11 Die bedingte Wahrscheinlichkeit

5

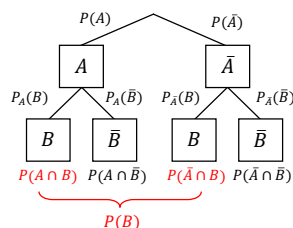
Bezeichnen A und B Ereignisse eines Zufallsexperiments mit $P(A) \neq 0$, so versteht man unter der **bedingten Wahrscheinlichkeit** $P_A(B)$ die Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Ereignisses B unter der Bedingung, dass A bereits eingetreten ist.

Es gilt: $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

Vierfeldertafel

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A \cap B)$	$P(A \cap \bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A} \cap B)$	$P(\bar{A} \cap \bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Baumdiagramm



M11 Die bedingte Wahrscheinlichkeit

5

Beispiel:

Von den 80 Schülerinnen und Schülern der 11. Jahrgangsstufe werden die Merkmale K : „Schüler geht regelmäßig ins Kino.“ Und F : „Schüler besucht regelmäßig ein Fitnessstudio.“ untersucht. Dabei ergab sich die nebenstehende Vierfeldertafel.

	K	$\bar{K}$	
F			30
$\bar{F}$		25	
	35		80

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass ...

- eine zufällig ausgewählte Person regelmäßig ins Fitnessstudio geht.
- eine zufällig ausgewählte Person regelmäßig ins Kino geht und kein Fitnessstudio besucht.
- ein Fitnessstudiobesucher regelmäßig ins Kino geht.

Lösung:

a) $P(a) = P(F) = \frac{30}{80} = 0,375$

b) $P(b) = P(K \cap \bar{F}) = \frac{25}{80} = 0,3125$

c) $P(c) = P_F(K) = \frac{P(F \cap K)}{P(F)} = \frac{\frac{10}{80}}{\frac{30}{80}} = \frac{1}{3}$

	K	$\bar{K}$	
F	10	20	30
$\bar{F}$	25	25	50
	35	45	80

M11 Die stochastische Unabhängigkeit

6

Zwei Ereignisse A und B heißen **stochastisch unabhängig**, wenn das Eintreten des einen Ereignisses keinen Einfluss auf das zweite Ereignis hat.

Dann gilt: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

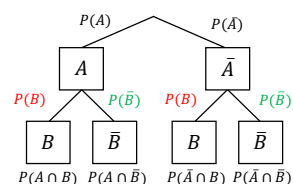
Andernfalls nennt man die Ereignisse **stochastisch abhängig**.

Vierfeldertafel und Baumdiagramm stochastisch unabhängiger Ereignisse sehen wie folgt aus:

Vierfeldertafel

	B	$\bar{B}$	
A	$P(A) \cdot P(B)$	$P(A) \cdot P(\bar{B})$	$P(A)$
$\bar{A}$	$P(\bar{A}) \cdot P(B)$	$P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B})$	$P(\bar{A})$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

Baumdiagramm



Die Vierfeldertafel ist eine Multiplikationstabelle.

Im Baumdiagramm stehen auf der 2. Stufe die gleichen Wahrscheinlichkeiten.

M11 Die stochastische Unabhängigkeit

6

Beispiel:

- Eine Laplace-Münze wird zweimal geworfen und die Ereignisse A : „Man wirft höchstens einmal Zahl.“ und B : „Jede der beiden Seiten fällt mindestens einmal.“ betrachtet. Untersuchen Sie, ob die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig sind.
- Vervollständigen Sie die nebenstehende Vierfeldertafel für die beiden stochastisch unabhängigen Ereignisse A und B und erstellen Sie daraus ein vollständig ausgefülltes Baumdiagramm!

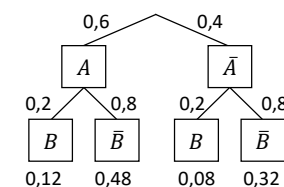
	B	$\bar{B}$	
A			0,6
$\bar{A}$		0,32	

Lösung:

1) $P(A) = P(\{kk, kz, zk\}) = \frac{3}{4}$ $P(B) = P(\{kz, zk\}) = \frac{1}{2}$ $P(A \cap B) = P(\{kz, zk\}) = \frac{1}{2}$
 $P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8} \neq \frac{1}{2} = P(A \cap B) \Rightarrow$ Die Ereignisse A und B sind stochastisch abhängig.

2)

	B	$\bar{B}$	
A	0,12	0,48	0,6
$\bar{A}$	0,08	0,32	0,4
	0,2	$\frac{0,32}{0,4} = 0,8$	1

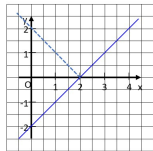


M11 Differenzen-/Differentialquotient – Änderungsraten – Ableitungsfunktion	7
Ist die Funktion f im Intervall $[a; b]$ definiert, so nennt man den Quotienten $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ Differenzenquotient und seinen Wert mittlere Änderungsrate von f im Intervall $[a; b]$. Anschaulich entspricht der Wert des Differenzenquotienten der Steigung der Sekante durch die beiden Punkte $P(a/f(a))$ und $Q(b/f(b))$. Existiert für die Funktion f an der Stelle x_0 der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (d.h. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$), so heißt dieser Grenzwert Differentialquotient, sein Wert lokale oder momentane Änderungsrate. Anschaulich entspricht der Wert des Differentialquotienten der Steigung der Tangente an G_f im Punkt $P_0(x_0/f(x_0))$. Hier kann alternativ auch die h-Methode verwendet werden, dazu setzt man $x = x_0 + h$ (bzw. $x = x_0 - h$) und berechnet dann den Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h}$ (bzw. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0-h)-f(x_0)}{-h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$). Den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ bezeichnet man dann als Ableitung von f an der Stelle x_0 und schreibt kurz $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$. Die Funktion f', die jeder Stelle $x \in D$ den Wert der Ableitung $f'(x)$ zuordnet, nennt man Ableitungsfunktion f' von f.	

M11 Differenzen-/Differentialquotient – Änderungsraten – Ableitungsfunktion	7
Beispiel: (aus Abitur 2017, Prüfungsteil A) An einer Messstation wurde über einen Zeitraum von 10 Stunden die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft ermittelt. Dabei kann die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft zum Zeitpunkt t (in Stunden nach Beginn der Messung) durch die Gleichung $n(t) = 3t^2 - 60t + 500$ beschrieben werden. - Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft während der ersten beiden Stunden der Messung und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang. - Ermitteln Sie den Zeitpunkt nach Beginn der Messung, zu dem die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30 \frac{1}{h}$ beträgt. Lösung: $\frac{n(2)-n(0)}{2-0} = \frac{392-500}{2} = -54$ In den ersten beiden Stunden sank die Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft durchschnittlich um 54 pro Stunde. $n'(t) = 6t - 60$ $6t - 60 = -30 \Rightarrow 6t = 30 \Rightarrow t = 5$ 5 Stunden nach Beginn der Messung beträgt die momentane Änderungsrate der Anzahl der Pollen in einem Kubikmeter Luft $-30 \frac{1}{h}$.	

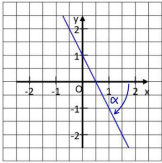
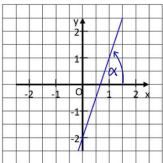
M11 Stetigkeit und Differenzierbarkeit	8
Ist eine Funktion f in einem Intervall I definiert und kann ihr Graph in diesem Intervall ohne abzusetzen durchgezeichnet werden, so nennt man f in diesem Intervall stetig, macht der Graph der Funktion an einer Stelle einen „Sprung“, so nennt man die Funktion an dieser Stelle unstetig. Exakte Definition: f ist an der Stelle x_0 stetig, wenn gilt: $f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ Existiert für eine Funktion f an der Stelle x_0 der Differentialquotient $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (bzw. mit der h-Methode der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$), so heißt f an der Stelle x_0 differenzierbar. Ist die Funktion an allen Stellen x_0 aus einem Intervall I differenzierbar, so nennt man f eine in I differenzierbare Funktion. Bemerkung: Ist eine in einem Intervall I definierte Funktion dort nicht stetig, so kann sie dort auch nicht differenzierbar sein. Eine in einem Intervall I differenzierbare Funktion ist dort immer auch stetig.	

M11 Stetigkeit und Differenzierbarkeit	8
Beispiel: - Untersuchen Sie rechnerisch die Funktion $f(x) = x - 2$ auf Differenzierbarkeit an der Nahtstelle! - Gegeben ist die abschnittsweise definierte Funktion $f: x \mapsto \begin{cases} ax^2 + b & \text{für } x < 1 \\ x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$. Bestimmen Sie die Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass f an der Nahtstelle $x_0 = 1$ stetig und differenzierbar ist! Lösung: - Zunächst muss die Betragsfunktion abschnittsweise definiert dargestellt werden. Dazu wird nebenstehende Skizze verwendet. Der Teil der Gerade, der sich unterhalb der x-Achse befindet, wird nach oben gespiegelt. Damit ergibt sich: $f(x) = x - 2 = \begin{cases} x - 2 & \text{für } x > 2 \\ -x + 2 & \text{für } x \leq 2 \end{cases}$ Die Funktion ist offensichtlich bei $x = 2$ stetig (siehe Graph). $\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x+2-0}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x-2)}{x-2} = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2-0}{x-2} = 1 \end{aligned} \right\} f \text{ ist bei } x = 2 \text{ nicht differenzierbar.}$ - Stetigkeit: $f(1) = 1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ax^2 + b = a + b, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x = 1$, stetig für $a + b = 1$ Differenzierbarkeit: linksseitiger Grenzwert der Ableitung an der Stelle 1: $2a \cdot 1 = 2a$ rechtsseitiger Grenzwert der Ableitung: 1 Differenzierbar für $2a = 1 \Rightarrow a = 0,5 \Rightarrow b = 0,5$	



M11 Ableitungsregeln	9
Sind die Funktionen u und v differenzierbar, so gilt: Potenzregel $f: x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \Rightarrow f': x \mapsto n \cdot x^{n-1}$ Faktorregel $f: x \mapsto k \cdot u(x), k \in \mathbb{R} \Rightarrow f': x \mapsto k \cdot u'(x)$ Summenregel $f: x \mapsto u(x) + v(x) \Rightarrow f': x \mapsto u'(x) + v'(x)$ Konstantenregel $f: x \mapsto c, c \in \mathbb{R} \Rightarrow f': x \mapsto 0$	

M11 Ableitungsregeln	9
Beispiele: Geben Sie jeweils die Ableitungsfunktionen an! a) $f(x) = 3x^3 - 0,5x^2 + 2x - 7$ b) $g(x) = x^2(x-1)^2$ c) $h(x) = ax^8 - a^2x^2 + 2ax - 3a^2$ d) $k(a) = ax^8 - a^2x^2 + 2ax - 3a^2$ Lösung: a) $f'(x) = 9x^2 - x + 2$ b) $g(x)$ muss zunächst ausmultipliziert werden, sonst sind die Ableitungsregeln nicht anwendbar! $g(x) = x^2(x^2 - 2x - 1) = x^4 - 2x^3 - x^2 \Rightarrow g'(x) = 4x^3 - 6x^2 - 2x$ c) $h'(x) = 8ax^7 - 2a^2x + 2a$ d) $k'(a) = x^8 - 2ax^2 + 2x - 6a$	

M11 Tangente – Normale – Steigungswinkel	10
Beim Aufstellen der Tangente an G_f im Punkt $P(x_0/f(x_0))$ geht man wie folgt vor: 1) Berechnen der Steigung der Tangente mithilfe der Ableitung: $m = f'(x_0)$ 2) Einsetzen der Steigung m und der Koordinaten des Punktes P in die Gleichung $y = mx + t$ und Auflösen dieser Gleichung nach t. Die Normale an G_f im Punkt $P(x_0/f(x_0))$ steht senkrecht auf der Tangente an G_f im Punkt $P(x_0/f(x_0))$. Es gilt: $m_{Tangente} \cdot m_{Normale} = -1$ Mithilfe der Formel $m = \tan \alpha$ kann man den Winkel berechnen, den eine Gerade mit der x-Achse einschließt. Dabei unterscheidet man die folgenden beiden Fälle: 1) $m < 0 \Rightarrow \alpha < 0 \Rightarrow$ die Gerade fällt, der eingeschlossene Winkel liegt unterhalb der x-Achse. 2) $m > 0 \Rightarrow \alpha > 0 \Rightarrow$ die Gerade steigt, der eingeschlossene Winkel liegt oberhalb der x-Achse.  	

M11 Tangente – Normale – Steigungswinkel	10
Beispiel: Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2$. - Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente und der Normale an den Graphen G_f im Punkt $P(-3/f(-3))$! - Berechnen Sie, an welchen Stellen der Graph von f einen Steigungswinkel von 30° besitzt und runden Sie Ihr Ergebnis auf zwei Dezimalstellen! - Überprüfen Sie, ob es eine Tangente an G_f gibt, die parallel zur Geraden $y = -4x + 8$ verläuft! Lösung: a) $f(-3) = -18, f'(x) = x^2 - 2x, f'(-3) = 15$ Ansatz für die Tangentengleichung: $t: y = 15x + t, P$ einsetzen $\Rightarrow -18 = 15 \cdot (-3) + t \Rightarrow t = 27$ Tangentengleichung: $t: y = 15x + 27$ Ansatz für die Normalengleichung: $n: y = -\frac{1}{15}x + t, P$ einsetzen $\Rightarrow -18 = -\frac{1}{15} \cdot (-3) + t \Rightarrow t = -18,2$ Normalengleichung: $n: y = -\frac{1}{15}x - 18,2$ b) $m = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x^2 - 2x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x^2 - 2x - \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + \frac{4}{3}}}{2} = \left\{ \begin{matrix} 2,26 \\ -0,26 \end{matrix} \right.$ c) $m = -4 \Rightarrow x^2 - 2x = -4 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 4}}{2} \Rightarrow$ Da der Radikand negativ ist, gibt es keine derartige Tangente.	

M11 Monotonie und 1. Ableitung	11
Die Funktion f sei in einem Intervall $I =]a; b[$ differenzierbar. Definition: f nennt man in I streng monoton zunehmend bzw. streng monoton abnehmend, wenn für alle x_1, x_2 in I mit $x_1 < x_2$ gilt: $f(x_1) < f(x_2)$ bzw. $f(x_1) > f(x_2)$. Der zugehörige Graph G_f ist dann in diesem Intervall streng monoton steigend bzw. streng monoton fallend. Gilt die schwächere Bedingung $f(x_1) \leq f(x_2)$ bzw. $f(x_1) \geq f(x_2)$, so heißt f monoton zunehmend bzw. monoton abnehmend. Monotoniekriterium mit der 1. Ableitung: Ist $f'(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton zunehmend in I. Ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f streng monoton abnehmend in I. Bemerkung: Die Bedingung ist nur hinreichend, nicht notwendig, d.h. die Umkehrung des Monotoniekriteriums gilt nicht. Betrachtet man z.B. die Funktion $f(x) = x^3$, so ist der zugehörige Graph gemäß Definition in $\mathbb{R}$ streng monoton steigend. Es gilt jedoch $f'(0) = 0$	

M11 Monotonie und 1. Ableitung	11
Beispiel: Bestimmen Sie die größtmöglichen Monotonieintervalle der Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5$ Lösung: Für die Ableitung gilt: $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x = x \left(-\frac{3}{2}x + 3\right)$ Zunächst bestimmt man die Nullstellen der 1. Ableitung, da sich nur an diesen das Vorzeichen von f' verändern kann (aber nicht muss). $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \left(-\frac{3}{2}x + 3\right) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 2$ Man berechnet nun einzelne Werte, z.B. $f'(-1) = -4,5 < 0$ $f'(1) = 1,5 > 0$ $f'(3) = -4,5 < 0$ Damit ergeben sich die folgenden Monotonieintervalle: G_f ist streng monoton fallend in $] - \infty; 0]$, streng monoton steigend in $[0; 2]$ und streng monoton fallend in $[2; \infty[$. (Bemerkung: Die Grenze können zu mehreren Intervallen gehören.)	

M11 Krümmung und 2. Ableitung	12
Die Funktion f sei in einem Intervall $I =]a; b[$ mindestens zweimal differenzierbar. Definition: Bewegt man sich auf dem Graphen G_f in positiver x-Richtung und beschreibt dabei eine Links- bzw. Rechtskurve, so heißt G_f in diesem Bereich linksgekrümmt bzw. rechtsgekrümmt. Krümmungskriterium mit der 2. Ableitung Ist $f''(x) > 0$ für alle $x \in I$, so ist f' streng monoton zunehmend in I und G_f linksgekrümmt in I. Ist $f''(x) < 0$ für alle $x \in I$, so ist f' streng monoton abnehmend in I und G_f rechtsgekrümmt in I. Bemerkung: Die Bedingung ist nur hinreichend, nicht notwendig, d.h. die Umkehrung gilt nicht. Betrachtet man z.B. die Funktion $f(x) = x^4$, so ist der zugehörige Graph in $\mathbb{R}$ linksgekrümmt. Es gilt jedoch $f''(0) = 0$	

M11 Krümmung und 2. Ableitung	12
Beispiel: Untersuchen Sie rechnerisch das Krümmungsverhalten der Funktion $f: x \mapsto -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5$ Lösung: Für die ersten beiden Ableitungen gilt: $f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 3x$; $f''(x) = -3x + 3$ Zunächst bestimmt man die Nullstellen der 2. Ableitung, da sich nur an diesen das Vorzeichen von f'' verändern kann (aber nicht muss). $f''(x) = 0 \Leftrightarrow -3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1$ Man berechnet nun einzelne Werte, z.B. $f''(0) = 3 > 0$ $f''(2) = -3 < 0$ Damit ergeben sich die folgenden Krümmungsintervalle: G_f ist linksgekrümmt in $] - \infty; 1]$, rechtsgekrümmt in $[1; \infty[$	

M11 Extremstellen, Extremwerte und Extrempunkte	13
Gegeben ist eine Funktion f mit maximaler Definitionsmenge D und eine Stelle $x_0 \in D$. Definition: Der Funktionswert $f(x_0)$ heißt lokales Maximum von f (bzw. lokales Minimum von f), wenn es eine Umgebung U von x_0 gibt, so dass für alle Werte $x \in U$ gilt: $f(x) \leq f(x_0)$ (bzw. $f(x) \geq f(x_0)$) Den zugehörigen Punkt $P(x_0/f(x_0))$ bezeichnet man dann als Extrempunkt (Hochpunkt bzw. Tiefpunkt), die Stelle x_0 als Extremstelle (Maximalstelle bzw. Minimalstelle) und den Funktionswert $f(x_0)$ auch als Extremwert (Maximalwert bzw. Minimalwert). Bemerkungen: 1) Gilt die Bedingung $f(x) \leq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geq f(x_0)$ für alle Werte $x \in D$, so handelt es sich um ein globales Maximum von f (bzw. globales Minimum von f). 2) Ist die Funktion f auf einem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ definiert, so tritt an den Randstellen a und b ein kleinster oder größter Funktionswert auf. Solche Extrema nennt man Randextrema.	

M11 Extremstellen, Extremwerte und Extrempunkte	13
Beispiel: Gegeben ist der nebenstehend dargestellte Graph einer Funktion f. Lesen Sie am Graphen die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte ab und geben Sie jeweils an, ob im Intervall $[-3; 3]$ ein lokales oder globales Extremum vorliegt. Lösung: Im Intervall $[-3; 3]$ gilt: Bei $x_1 = -2,5$ befindet sich ein globales Maximum, der Punkt $(-2,5/1)$ ist ein Hochpunkt. Bei $x_2 = -1,5$ befindet sich ein lokales Minimum, der Punkt $(-1,5/-1)$ ist ein Tiefpunkt. Bei $x_3 = -0,5$ befindet sich ein lokales Maximum, der Punkt $(-0,5/0,5)$ ist ein Hochpunkt. Bei $x_4 = 0,5$ befindet sich ein globales Minimum, der Punkt $(0,5/-1,5)$ ist ein Tiefpunkt. Bei $x_5 = 2$ befindet sich ein globales Maximum, der Punkt $(2/1)$ ist ein Hochpunkt. Bei $x_6 = 2,5$ befindet sich ein lokales Minimum, der Punkt $(2,5/0,5)$ ist ein Tiefpunkt.	

M11 Vorgehen zur Extremwertbestimmung	14						
Die Funktion f sei in einem Intervall $I =]a; b[$ mindestens zweimal differenzierbar. Zur Bestimmung der Extremwerte geht man wie folgt vor: 1) Lösen der Gleichung $f'(x) = 0$, an diesen Stellen besitzt der Graph G_f waagrechte Tangenten. 2) Einsetzen der Stellen in die Monotonietabelle: <table border="1" style="margin-left: 40px;"> <tr> <td>x</td><td>...</td></tr> <tr> <td>$f'(x)$</td><td>...</td></tr> <tr> <td>G_f</td><td>...</td></tr> </table> Gilt für eine Stelle x_0, dass $f'(x_0) = 0$ und f' bei x_0 einen Vorzeichenwechsel von $+$ nach $-$ hat, so liegt ein Maximum vor. Ändert f' sein Vorzeichen von $-$ nach $+$, so handelt es sich um ein Minimum, ohne Vorzeichenwechsel (d.h. bei einer NST von f' ohne VZW) befindet sich im Punkt $P(x_0/f(x_0))$ ein Terrassenpunkt. Alternative Lösung mit der 2. Ableitung: • Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so ist G_f in einer Umgebung von x_0 linksgekrümmt, d.h. $P(x_0/f(x_0))$ ist ein Tiefpunkt. • Gilt $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so ist G_f in einer Umgebung von x_0 rechtsgekrümmt, d.h. $P(x_0/f(x_0))$ ist ein Hochpunkt. Bemerkung: Die Bedingung ist nur hinreichend, nicht notwendig. Betrachtet man z.B. die Funktion $f(x) = x^4$, so hat der zugehörige Graph im Punkt $P(0/0)$ einen Tiefpunkt. Es gilt jedoch $f'(0) = f''(0) = 0$		x	...	$f'(x)$	...	G_f	...
x	...						
$f'(x)$	...						
G_f	...						

M11 Vorgehen zur Extremwertbestimmung	14
Beispiele: Bestimmen Sie jeweils Lage und Art der Extrema in den angegebenen Intervallen! a) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 + 5$ im Intervall $I = \mathbb{R}$ b) $g(x) = 0,1x^3 - 1,05x^2 - 2,4x$ im Intervall $I = [-2; 6]$ Lösung: a) $f'(x) = x^3 - x^2 = x^2(x - 1)$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_{1/2} = 0, x_2 = 1$ Da $x_{1/2} = 0$ eine doppelte NST ist, liegt hier kein Vorzeichenwechsel vor, damit besitzt G_f bei $x = 0$ einen Terrassenpunkt $\Rightarrow TEP(0/f(0)) = TEP(0/5)$. $f''(x) = 3x^2 - 2x$, $f''(1) = 1 > 0 \Rightarrow TIP(1/f(1)) = TIP(1/4\frac{11}{12})$ b) $g'(x) = 0,3x^2 - 2,1x - 2,4$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 0,3x^2 - 2,1x - 2,4 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{2,1 \pm \sqrt{2,1^2 - 4 \cdot 0,3 \cdot (-2,4)}}{0,6}$ $x_{1/2} = \frac{2,1 \pm 2,7}{0,6} = \begin{cases} 8 \notin I \\ -1 \end{cases}$ $g''(x) = 0,6x - 2,1$; $g''(-1) = -2,7 < 0 \Rightarrow HOP(-1/1,25)$ Berechnung der Randwerte: $g(-2) = -0,2$ und $g'(2) = 0,6 > 0 \Rightarrow$ Randminimum $(-2/-0,2)$ $g(6) = -30,6$ und $g'(6) = -4,2 < 0 \Rightarrow$ Randminimum $(6/-30,6)$	

M11 Vorgehen zur Bestimmung von Wendepunkten

15

Die Funktion f sei in einem Intervall $I =]a; b[$ dreimal differenzierbar.

Zur Bestimmung der **Wendepunkte** geht man wie folgt vor:

- 1) Lösen der Gleichung $f''(x) = 0$
- 2) Einsetzen der Stellen in die Krümmungstabelle:

x	...	
$f''(x)$	...	Gilt für eine Stelle x_0 , dass $f''(x_0) = 0$ und f'' bei x_0 einen Vorzeichenwechsel hat, d.h. x_0 ist eine NST von f'' mit ungerader Vielfachheit, so befindet sich im Punkt $P(x_0/f(x_0))$ ein Wendepunkt .
G_f	...	

Alternative Lösung mit der 3. Ableitung:

- Gilt $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so ist $P(x_0/f(x_0))$ ein Wendepunkt.

Bemerkung:

- 1) Die Bedingung ist nur hinreichend, nicht notwendig. Betrachtet man z.B. die Funktion $f(x) = x^3$, so hat der zugehörige Graph im Punkt $P(0/0)$ einen Wendepunkt. Es gilt jedoch $f''(0) = f'''(0) = 0$
- 2) Die Tangente an G_f im Wendepunkt heißt **Wendetangente**.
- 3) Ein Wendepunkt mit waagrechter Tangente ist ein **Terrassenpunkt**.

M11 Vorgehen zur Bestimmung von Wendepunkten

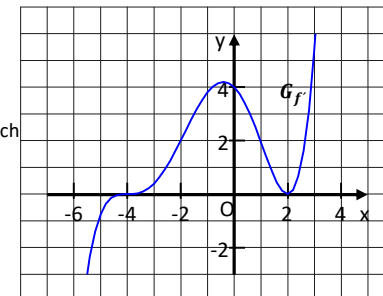
15

Beispiel:

Die Abbildung zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f' einer ganzrationalen Funktion f , deren Monotonieverhalten sich außerhalb des dargestellten Bereichs nicht mehr ändert.

Entscheiden und begründen Sie jeweils, ob die Aussage wahr oder falsch ist!

- 1) G_f ist im Intervall $[-4; 2]$ linksgekrümmt.
- 2) G_f hat bei $x_0 = -4$ einen Terrassenpunkt.
- 3) G_f besitzt drei Wendepunkte.



Lösung:

- 1) FALSCH: In $[-4; 2]$ ist $G_{f'}$ sowohl streng monoton steigend als auch fallend $\Rightarrow f''$ ist in diesem Intervall sowohl positiv als auch negativ $\Rightarrow G_f$ ist im Intervall sowohl links- als auch rechtsgekrümmt.
- 2) FALSCH: $f'(-4) = 0$, aber f' hat bei $x = -4$ einen Vorzeichenwechsel von $-$ nach $+$ $\Rightarrow$ TIP bei $x = -4$
- 3) FALSCH: f'' hat zwar drei Nullstellen (an den Stellen, an denen $G_{f'}$ waagrechte Tangenten besitzt), bei $x = -4$ liegt jedoch eine Nullstelle von f'' ohne Vorzeichenwechsel vor. Da die beiden anderen Nullstellen einen Vorzeichenwechsel besitzen, hat G_f genau zwei Wendepunkte.

M11 Das Newton-Verfahren

16

Mithilfe des Newton-Verfahrens kann man näherungsweise die Lösung beliebiger Gleichungen ermitteln. Dazu geht man wie folgt vor (Iterationsverfahren):

- 1) Man bringt die Gleichung in die Form $f(x) = 0$
- 2) Man wählt einen geeigneten Startwert x_0 in der Nähe der gesuchten Nullstelle x^* der Funktion f
- 3) Die Tangente an G_f im Punkt $P(x_0/f(x_0))$ schneidet die x -Achse an der Stelle x_1
- 4) Die Tangente an G_f im Punkt $P(x_1/f(x_1))$ schneidet die x -Achse an der Stelle x_2
- 5) ...

Iterationsvorschrift: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$ mit $n \in \mathbb{N}$.

Grenzen des Newton-Verfahrens:

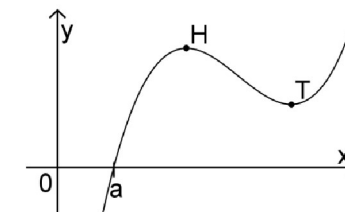
Wird als Startwert die x -Koordinate eines Hochpunkts, eines Tiefpunkts oder eines Terrassenpunkts gewählt, so stoppt das Iterationsverfahren, da hier $f'(x_0) = 0$ gilt. Anschaulich bedeutet dies, dass die Tangente an G_f im Punkt $P(x_0/f(x_0))$ keine NST besitzt.

M11 Das Newton-Verfahren

16

Beispiel: (aus Abitur 2015, Prüfungsteil A)

Die Abbildung zeigt den Graphen einer in $\mathbb{R}$ definierten differenzierbaren Funktion g . Mithilfe des Newton-Verfahrens soll ein Näherungswert für die Nullstelle a von g ermittelt werden. Begründen Sie, dass weder die x -Koordinate des Hochpunkts H, noch die des Tiefpunkts T als Startwert des Newton-Verfahrens geeignet ist.



Lösung:

Anschauliche Lösung: Verwendet man eine der beiden x -Koordinaten als Startwert, so würde die zugehörige Tangente parallel zur x -Achse verlaufen, sie hätte also keinen Schnittpunkt mit der x -Achse. Damit würde die Iteration stoppen, es ergäbe sich kein weiterer Näherungswert für die Nullstelle.

Rechnerische Lösung: Sowohl im Hoch- als auch im Tiefpunkt gilt: $g'(x_0) = 0$, damit würde in der Iterationsvorschrift eine Division durch 0 erfolgen, dies führt zu einem Widerspruch.

